Résolution d'équations de diffusion en milieu hétérogène par des méthodes de Monte-Carlo

Thi Quynh Giang NGUYEN, Université de Toulon

Des problèmes de diffusions en milieu hétérogène apparaissent dans de nombreux domaines tels que l'électro-encéphalographie, la dynamique moléculaire et la tomographie par impédance électrique. La méthode des éléments finis est la méthode la plus utilisée pour résoudre les équations de diffusion. On dispose de plus de nombreux outils en accès libre de résolution de ce type d'équations. Dans le cadre de la dimension deux, le logiciel freefem ++ permet par example de résoudre des équations de diffusion avec tous types de conditions aux bords: Dirichlet, Robin, mélange Dirichlet et Neumann. On obtient ainsi une solution approchée en tout point du domaine.

Dans le cadre de la résolution de problèmes inverses, on peut-être amené calculer un grand nombre de fois la solution ou la moyenne de la solution sur seulement une partie du domaine. Par exemple, la détection de tumeurs cancéreuses dans le sein s'effectue à partir de potentiels mesurés sur les électrodes attachées sur la peau du sein. D'un point de vue mathématique, le calcul des potentiels sur des électrodes équivaut à calculer la moyenne sur les électrodes des solutions d'une équation de diffusion avec certains conditions aux bords particulières. Cela justifie que nous avons pas forcément besoin de connaître la solution partout dans le domaine.

Dans ce type de cas, la méthode de Monte Carlo peut s'avérer une alternative très efficace. Cette méthode donne en effet une solution approchée en un point du domaine ou sa moyenne sur une zone sans faire de maillage et est peu sensible à la dimension du problème. L'algorithme de Monte Carlo pour l'équation de Laplace avec conditions de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, & x \in D \\ u(x) = g(x), & x \in \partial D \end{cases}$$

repose sur la simulation du mouvement Brownien en utilisant des méthodes efficaces telles que la marche sur les sphères et la formule de Feymann-Kac

$$u(x_0) = \mathbb{E}_{x_0}(g(W_{\tau_D})),$$

où $\{W_t\}_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien et τ_D est le premier temps sortie du domaine D.
Dans les cas pratiques, le coefficient de diffusion est seulement constant par morceaux et les conditions aux limites peuvent être de différents types. Les difficultés de simulation apparaîssent quand la marche aléatoire sous-jacente touche le bord ou l'interface entre les sous-domaines. Nous allons présenter ici une méthode très générale utilisant des techniques de différences finies de pas h pour traiter ces problèmes. Elles introduisent un biais global qui est seulement en $O(h^2)$. Nous présenterons diverses applications numériques de cette méthode.

Références

[1] S.Maire, G.Nguyen, Stochastic finite differences for elliptic diffusion equation in stratified domains, hal-00809203, 2013.

Thi Quynh Giang NGUYEN, ISITV, Université de Toulon, AV. Georges Pompidou BP 56, 83162 La Valette du Var Cedex
tnguyen@univ-tln.fr